

IMPLEMENTACE STĚNOVÉHO KONEČNÉHO PRVKU PRO VÝPOČET VELKÝCH DEFORMACÍ

IMPLEMENTATION OF WALL FINITE ELEMENT FOR A LARGE DISPLACEMENTS PROBLEM

Petr Frantík¹, Jiří Macur²

Abstract

This paper is focused on implementation of common quadrilateral finite element adapted for solving of large displacements problems in structural mechanics. There are some discovered issues which had to be solved.

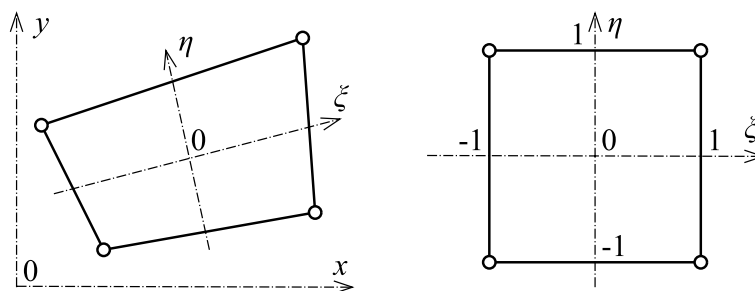
1 Úvod

Článek se zabývá podrobným popisem implementace tradičního lineárního lagrangeovského stěnového konečného prvku pro potřeby výpočtu velkých deformací. Upřesněme, že deformacemi máme na mysli velká posunutí uzlů popř. velké pootočení prvku jako celku, nikoliv velká poměrná přetvoření materiálu prvku.

Popsanou techniku lze pravděpodobně s úspěchem použít rovněž pro analogické případy, například prostorové konečné prvky.

2 Konečný prvek

Jedná se o izoparametrický prvek se čtyřmi uzly v rozích obecného konvexního čtyřúhelníka, viz obr. 1. Následující popis prvku byl vytvořen díky volně dostupnému zdroji [1]. Jak již napovídá obrázek, prvek je transformován do lokálního souřadného systému $\zeta\eta$ pomocí tzv. tvarových funkcí N , které zároveň slouží pro aproximaci neznámého řešení, zde konkrétně funkcí posunutí bodů u a v .



Obr. 1: Čtyřúhelníkový prvek v globálním (vlevo) a lokálním (vpravo) souřadném systému

Těchto tvarových funkcí je právě tolik, kolik má prvek uzlů. Jejich vyjádření může být například následující:

¹ Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, e-mail: kitnarf@centrum.cz.

² doc. RNDr. Jiří Macur, CSc., dtto., Ústav automatizace inženýrských úloh a informatiky, e-mail: macur.j@fce.vutbr.cz.

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi), \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\xi), \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi), \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Globální souřadnice $x y$ lze díky těmto funkcím spočítat dosazením do výrazů:

$$\begin{aligned}
 x &= N_1x_{1,0} + N_2x_{2,0} + N_3x_{3,0} + N_4x_{4,0}, \\
 y &= N_1y_{1,0} + N_2y_{2,0} + N_3y_{3,0} + N_4y_{4,0},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

kde $x_{i,0} y_{i,0}$ jsou souřadnice uzlů nedeformovaného prvku, číslované proti směru chodu hodinových ručiček. Obdobně lze psát výrazy pro aproximace posunutí:

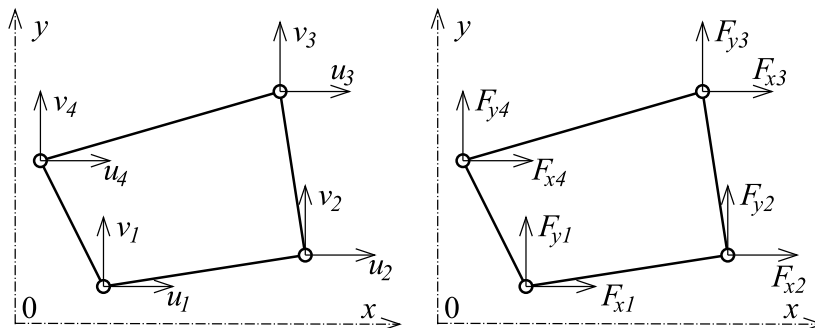
$$\begin{aligned}
 u &= N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4, \\
 v &= N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

kde $u_i v_i$ jsou příslušná posunutí uzlů. Použití stejných funkcí pro aproximaci neznámého řešení a pro transformaci souřadných systémů je důvodem, proč se takové prvky označují jako izoparametrické.

Analýzou tohoto prvku získáme vztahy mezi uzlovými posuny a uzlovými silami, které přehledně popisuje tzv. matice tuhosti prvku \mathbf{K}^e , nezávislá na zatížení a deformaci prvku (prvek je lineární), definovaná výrazem:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^e \mathbf{u},
 \tag{4}$$

kde \mathbf{F} je vektor uzlových sil a \mathbf{u} je vektor uzlových posunů, viz obr. 2.



Obr. 2: Uzlová posunutí (vlevo) a uzlové síly (vpravo)

3 Velké deformace

Problémem velkých deformací při současných malých poměrných přetvořeních materiálu prvku je především pootočení prvku. Postup, který je zde navržen, vychází ze dvou předpokladů:

- 1) Pro nenapjatý prvek musí vycházet nulové uzlové síly při jeho libovolném posunutí a pootočení jako celku.
- 2) Pro napjatý prvek nesmí být velikost uzlových sil závislá na jeho pootočení (směr sil je pochopitelně závislý).

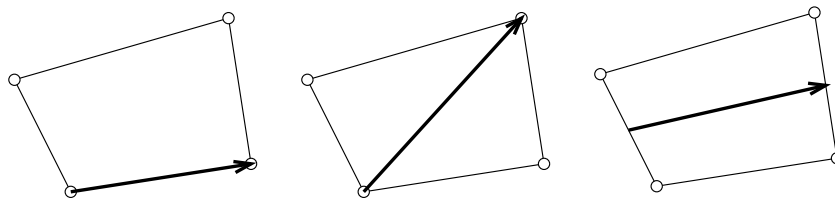
Po implementaci prvku se ukázala nutnost formulovat další dva předpoklady, které musí být splněny, aby se prvek choval konzistentně: velikost uzlových sil nesmí být závislá na definici prvku ve smyslu zvolení prvního uzlu. A dále prvek musí být zatížen momentem sil, který odpovídá záporně vzatému celkovému momentu uzlových sil nanesených na uzly deformovaného prvku (korekce nesplnění podmínky rovnováhy). Řešení těchto předpokladů bude popsáno v následujících samostatných kapitolách.

První dva předpoklady lze snadno vyřešit tak, že se na prvku určí dva „pevné“ body, které budou definovat směrový vektor. Tato dvojice bodů musí být jednoznačně dána polohou uzlů, jelikož jejich poloha je jediná informace o deformaci prvku, kterou dostáváme od objektu, který řeší úlohu (iterační nebo dynamický řešící mechanismus). Nejjednodušeji se nabízí následující dvojice bodů, viz obr. 3:

- koncové uzly některé strany prvku,
- jedna ze dvou diagonál prvku,
- jeden ze dvou tzv. bimedíánů prvku.

Dodejme, že bimedíán je úsečka spojující středy protilehlých stran čtyřúhelníku, podrobněji viz např. [2].

Zvolení některé strany pro definici směrového vektoru má oproti ostatním řešením nevýhodu v dvojnásobném počtu možností. Zbylá dvě řešení mají rovněž čtyři možnosti, ale vždy dvě z nich jsou vzájemně zaměnitelné.



Obr. 3: Triviální možnosti jak definovat směrový vektor prvku (zleva doprava: strana, diagonála, bimedíán)

Máme-li takto definované směrové vektory, můžeme provést transformaci nedeformovaného i deformovaného prvku. Poznamenejme, že transformaci nedeformovaného prvku provádíme pouze jednou. Souřadnice nedeformovaného prvku tak plní roli referenčního stavu. Transformací v tomto případě myslíme pootočení prvku tak, aby směrový vektor byl rovnoběžný s osou x . Transformaci provedeme podle výrazu:

$$\begin{aligned} x_{base} &= (x - x_1) \cos \alpha + (y - y_1) \sin \alpha, \\ y_{base} &= -(x - x_1) \sin \alpha + (y - y_1) \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

kde α je úhel směrového vektoru. Všimněme si, že je zde proveden rovněž posun, a to z důvodu numerické stability výpočtu. Úhel α směrového vektoru není nutné vyčíslit, jelikož lze z jednoduchých výrazů stanovit:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y_b - y_a}{l}, \\ \cos \alpha &= \frac{x_b - x_a}{l}, \end{aligned} \quad (6)$$

kde x_a, y_a je počáteční bod směrového vektoru, x_b, y_b je jeho koncový bod a l je velikost vektoru (délka), pro kterou platí:

$$l = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}. \quad (7)$$

Po provedení této transformace můžeme vypočítat aktuální uzlová posunutí jako prostý rozdíl mezi souřadnicemi deformovaného a nedeformovaného prvku:

$$u_i = x_{i,base} - x_{0,i,base}, \quad (8)$$

$$v_i = y_{i,base} - y_{0,i,base}$$

kde index *base* označuje prvek se směrovým vektorem totožným s osou *x* a index 0 označuje referenční stav (nedeformovaný prvek). Tato posunutí *u* *v* lze dosadit do výrazu (4), který nám poskytne velikosti uzlových sil F_{base} . Tyto uzlové síly je poté nutné transformovat zpět do původního souřadného systému pomocí výrazu:

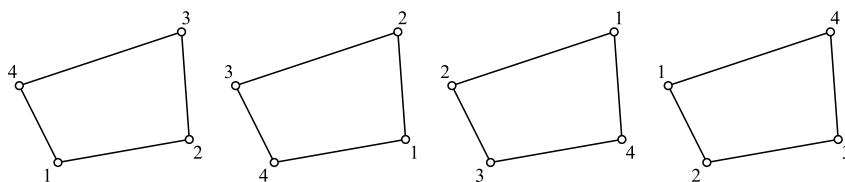
$$F_x = F_{x,base} \cos \alpha - F_{y,base} \sin \alpha, \quad (9)$$

$$F_y = F_{y,base} \sin \alpha + F_{x,base} \cos \alpha.$$

Těmito silami pak řešíme mechanizmus zatíží dané uzly.

4 Vynucená symetrie

Implementací výše popsaného postupu lze snadno zjistit, že výsledné uzlové síly deformovaného prvku budou záviset na zvoleném směrovém vektoru. Odchylna mezi silami bude úměrná deformaci prvku, přesněji velikosti jeho zkosení. Tato závislost se negativně projevuje při změně prvního uzlu prvku (máme celkem čtyři možnosti volby prvního uzlu), viz obr. 4.



Obr. 4: Čtyři variace výběru prvního uzlu

Při definici směrového vektoru pomocí diagonály nebo bimediantu tak máme dvě možné konfigurace, tj. dva různé vektory uzlových sil. Byly navrženy a testovány dva postupy, jak se vyhnout tomuto rozdílu:

- 1) průměrování; jsou vytvořeny dva prvky s poloviční tloušťkou, s posunutým prvním uzlem (obr. 4, první a druhý případ zleva),
- 2) výběr směrového vektoru podle vhodného absolutního kritéria.

Jako kritérium je zde pro druhý postup vzata za směrový vektor ta diagonála, která je delší u nedeformovaného prvku. Pokud jsou obě stejně dlouhé (obdélníkový prvek), vezme se ta, která je v aktuálním stavu deformovaného prvku delší. Tento postup vychází z analogické situace, která vzniká v počítačové grafice. Jedná se o úlohu vykreslení úsečky v rastru. Algoritmus kreslící čáru se orientuje podle osy rastru, se kterou úsečka svírá menší úhel, viz např. [3]. Dodejme, že tento postup je oproti prvnímu také vhodnější z hlediska výpočetní náročnosti.

5 Podmínky rovnováhy

Původní konečný prvek je odvozen za předpokladu malých deformací. Důsledkem tohoto předpokladu je neplatnost podmínek rovnováhy, pokud jsou zatěžovány uzly podrobené posunutí (uzlové síly působí fyzicky na uzly, které jsou posunuté vůči

referenčnímu stavu). Tato situace vzniká u prvků zatížených zkosením a způsobuje neplatnost pouze momentové podmínky rovnováhy. Vzniká zde nenulový moment. Přímočarým řešením této situace je zatížení prvku momentem stejné velikosti, opačného směru. Existuje zde mnoho způsobů, jak toto zatížení realizovat, přičemž není jasné, který je nejvhodnější. Uvedme příklady, z nichž některé reflektují zvolení směrového vektoru:

- zatížení uzlů spojujících určitou stranu prvku dvojicí sil (kolmých na onu stranu),
- zatížení uzlů diagonály prvku dtto.,
- zatížení uzlů bimediantu prvku dtto.,
- zatížení každé trojice uzlů dvěma dvojicemi sil vytvářející celkový moment odpovídající momentu na prostředním uzlu, vzniklého od konkrétního posunutí působitě uzlové síly.

V určitém smyslu by optimální mohla být poslední navržená varianta, která zohledňuje místo původu nerovnováhy.

6 Algoritmus vybraného řešení

Pro přehlednost doplníme konkrétní algoritmus, který je implementován ve volně dostupné Java aplikaci FyDiK2D [4]. Tato aplikace funguje na principu výpočtu nelineárních pohybových rovnic (nelineárního dynamického systému) pomocí explicitních numerických metod. V tomto smyslu o ní lze uvažovat jako o výše zmíněném řešícím mechanismu. Pro upřesnění: aplikace po jednotlivých krocích dává k dispozici souřadnice uzlů (hmotných bodů) a požaduje vrácení uzlových sil (sil zatěžujících hmotné body). Diferenciální rovnice, které aplikace řeší, mají tvar:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= v_{xi}, & \frac{dv_{xi}}{dt} &= \frac{R_{xi}}{m_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= v_{yi}, & \frac{dv_{yi}}{dt} &= \frac{R_{yi}}{m_i}, \end{aligned} \tag{10}$$

kde v_{xi} v_{yi} jsou složky rychlosti hmotného bodu s indexem i , R_{xi} R_{yi} jsou složky výslednice sil působící na tento hmotný bod, m_i je hmotnost bodu a t je čas. Více o řešení viz např. [5].

Algoritmus lze popsat následujícími kroky:

- 1) Inicializace výpočtu; Získání vlastností prvku a referenčních souřadnic uzlů (nedeformovaný stav).
 - a) Výpočet parametrů obou referenčních diagonál, tj. délky, sinů a kosinů jejich úhlů. Každá diagonála reprezentuje jeden směrový vektor referenčního stavu.
 - b) Transformace referenčních souřadnic pro obě diagonály.
 - c) Vytvoření dvojice referenčních prvků a sestavení jejich matic tuhosti.
- 2) Opakované výpočty (cyklus simulace).
 - a) Získání aktuálních souřadnic uzlů.
 - b) Výpočet parametrů obou aktuálních diagonál, tj. délky, sinů a kosinů jejich úhlů. Každá diagonála reprezentuje jeden směrový vektor aktuálního stavu.
 - c) Nalezení diagonály ve smyslu kritéria popsaného výše.
 - d) Transformace aktuálních souřadnic pro vybranou diagonálu (popsáno podrobněji v předchozí kapitole).
 - e) Výpočet aktuálních posunutí uzlů.
 - f) Výpočet aktuálních uzlových sil a jejich transformace.

- g) Nalezení momentové výslednice sil M .
- h) Výpočet dvou dvojic sil působících na obě diagonály prvku a celkově tvořících záporně vzatý moment M .
- i) Přičtení dvojic sil k aktuálním uzlovým silám.
- j) Předání uzlových sil řešícímu mechanismu.

7 Závěr

Článek se věnoval implementaci běžně používaného konečného prvku pro potřeby výpočtu velkých deformací. Ukázalo se několik důležitých problémů, které tento požadavek způsobuje. Konkrétně se jednalo o jednoznačnost určení uzlových sil v závislosti na volbě směrového vektoru a momentovou nerovnováhu v těchto uzlových silách vlivem uvažování působišť v uzlech přetvořeného prvku.

Bylo navrženo několik přímočarých technik, které uvedené problémy řeší s různou výpočetní efektivitou. Nejzajímavější z těchto technik je jednoznačný výběr směrového vektoru podle vybraného kritéria, inspirovaný z oblasti počítačové grafiky.

Ačkoliv se implementace zdá být nyní funkční, je třeba poznamenat, že ji nelze považovat za elegantní či optimální řešení daného problému.

Poděkování

Výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT, projekt IM0579, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS.

Literatura

- [1] GREENOUGH, CH. 2001. *Isoparametric elements*, <http://www.softeng.cse.clrc.ac.uk/felib3/Docs/html/Intro/intro-node33.html>.
- [2] WOLFRAM MATHWORLD. *Bimedian*, <http://mathworld.wolfram.com/Bimedian.html>.
- [3] ŽÁRA, J., BENEŠ, B., FELKEL, P. 1998. *Moderní počítačová grafika*. Computer Press.
- [4] FRANTÍK, P. 2007. *FyDiK2D Application*. <http://www.kitnarf.cz/fydik>.
- [5] FRANTÍK, P. 2009. Diskrétní model FyDiK2D. Sborník konference *Modelování v mechanice 2009*. VŠB-TU Ostrava.